

ГЛАВА 10. УСТОЙЧИВОСТЬ ПЛОСКИХ РАМ

	Стр.
10.1 Основные понятия	2
10.2 Формула Эйлера	3
10.3 Дифференциальное уравнение сжато-изогнутого стержня	4
10.4 Решение уравнения с помощью метода начальных параметров	5
10.5 Частное решение для равномерно распределенной нагрузки	6
10.6 Таблица реакций сжато-изогнутых однопролетных балок	7
10.7 Расчет рам на устойчивость методом перемещений	11

10.1 Основные понятия

Понятие устойчивости достаточно широко распространено в механике.

Существуют:

- устойчивость положения твердого тела,
- устойчивость формы равновесия,
- устойчивость движения (в сопротивлении материалов не рассматривается).

Одним из определений устойчивости является следующее: *если после действия малого возмущения тело возвращается в исходное состояние, то его положение устойчиво.*

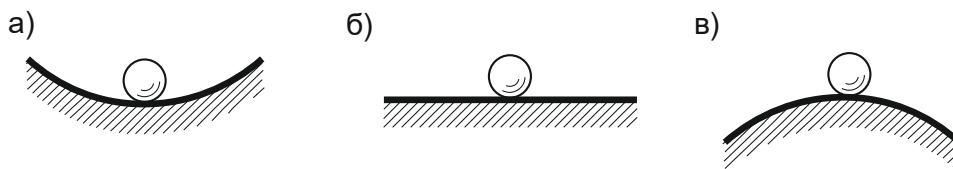


Рис.1. К понятию устойчивости положения

На рис. 1. показана наглядная иллюстрация **устойчивости положения**. Если шарик находится в лунке (рис.1,а), то после действия малого возмущения он совершит несколько колебаний и вернется в исходное состояние – его положение устойчиво. Если же шарик находится на выпуклой поверхности (рис. 1,в), то после возмущения он скатится – его положение неустойчиво. На горизонтальной плоскости (рис.1,б) равновесие является безразличным.

Можно привести различные примеры потери **устойчивости формы** (рис.2):

- центрально сжатый гибкий стержень (рис.2,а),
- рама, в стойках которой возникает только центральное сжатие (рис.2,б),
- сжатое кольцо или арка (рис.2,в),
- изгиб тонкой полосы (потеря устойчивости плоской формы изгиба) (рис.2,г).

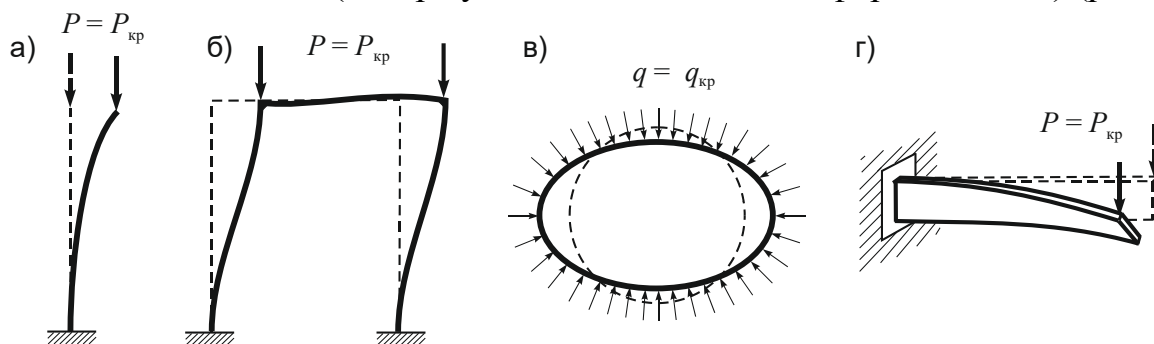


Рис.2. Примеры потери устойчивости с образованием смежных форм равновесия

Устойчивостью формы в общем случае называется способность деформируемого тела восстанавливать форму равновесия при устранении малых возмущений. При действии критической нагрузки образуются *смежные формы равновесия*.

В рассматриваемой главе будет идти речь об устойчивости формы стержней и стержневых систем при сжатии.

10.2 Формула Эйлера

Впервые, формула для определения критической силы была получена швейцарским ученым Леонардом Эйлером (1707-1783). для прямого стержня на двух

опорах, нагруженного центрально приложенной сжимающей силой P (рис. 10.3). Приведем основные этапы вывода этой формулы.

Дифференциальное уравнение изогнутой оси стержня: $EJv'' = -M$.

Изгибающий момент в любом сечении равен $M = Pv$.

Получаем однородное дифференциальное уравнение второго порядка: $EJv'' + Pv = 0$. (1)

Обозначим $k^2 = \frac{P}{EJ}$. (2)

С учетом (2) получаем $v'' + k^2v = 0$. (3)

Его решение: $v = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx$. (4)

Для определения констант C_1 и C_2 записываются граничные условия: 1) $x = 0, v = 0$; 2) $x = l, v = 0$.

В результате получаем: $C_2 = 0$ и $C_1 \sin kl = 0$.

1). $C_1 = 0$ – тривиальное решение; 2). $\sin kl = 0$

Из 2) $k = \frac{n\pi}{l}, (n = 0, 1, 2, \dots)$ и $P_n = \frac{n^2 \pi^2 EJ}{l^2}$. (5)

Очевидно, что минимальному значению критической силы, при которой происходит потеря устойчивости стержня, соответствует $n = 1$:

$$P_{кр}^э = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}. \quad (6)$$

Формула (6) называется формулой Эйлера для критической силы при центральном сжатии стержня, а сама сила называется *эйлеровой критической силой*.

Форма потери устойчивости определяется уравнением $v(x) = C \sin \frac{\pi}{l} x$.

При других условиях закрепления концов стержня, формула Эйлера записывается в виде:

$$P_{кр}^э = \frac{\pi^2 EJ}{(\mu l)^2}, \quad (7)$$

где μ – коэффициент приведения длины.

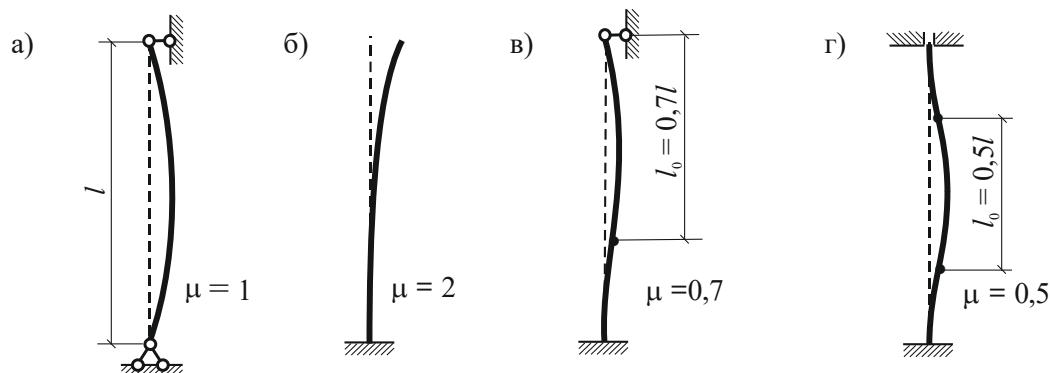


Рис.3. Значения коэффициента приведения длины при различных условиях закрепления.

10.3 Дифференциальное уравнение сжато-изогнутого стержня.

Рассмотрим гибкий стержень, находящийся под действием поперечной нагрузки и центрально приложенной сжимающей силы N (рис.4).

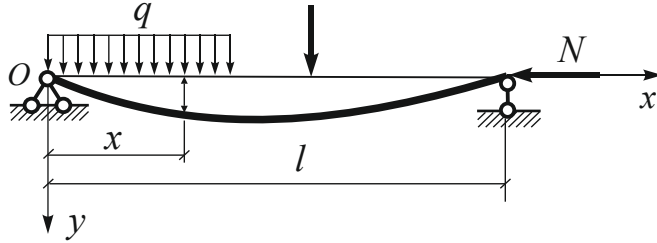


Рис.4. Гибкий стержень под действием поперечной и продольной нагрузок.

Вновь воспользуемся уравнением $EJv'' = -M$, в котором теперь

$$M = M_{\Pi} + Nv, \quad (8)$$

где M_{Π} – изгибающий момент от поперечной нагрузки.

Дифференциальное уравнение можно записать в виде:

$$EJv'' + Nv = -M_{\Pi}. \quad (9)$$

Вновь вводя обозначение $k^2 = \frac{N}{EJ}$, (10)

Получим
$$v'' + k^2v = -\frac{M_{\Pi}}{EJ}. \quad (11)$$

Продифференцируем уравнение (11) дважды по x , и учитывая, что $(M_{\Pi})'' = -q$, получим дифференциальное уравнение сжато-изогнутого стержня в виде:

$$v^{IV} + k^2v'' = q. \quad (12)$$

Найдем сначала решение однородного уравнения (с нулевой правой частью)

$$v^{IV} + k^2v'' = 0. \quad (13)$$

Соответствующее характеристическое уравнение $r^4 + r^2k^2 = 0$ имеет корни:

$$r_1 = r_2 = 0 \quad \text{и} \quad r_3 = r_4 = \pm ik.$$

Тогда решение однородного уравнения можно записать в виде:

$$v(x) = C_1 + C_2x + C_3 \cos kx + C_4 \sin kx. \quad (14)$$

Продифференцируем функцию (14) несколько раз:

$$\varphi(x) = v'(x) = C_2 - C_3k \sin kx + C_4k \cos kx. \quad (15)$$

$$M(x) = -EJv''(x) = C_3EJk^2 \cos kx + C_4EJk^2 \sin kx. \quad (16)$$

$$Q(x) = (M - Nv)' = M' - Nv' =$$

$$= -C_3EJk^3 \sin kx + C_4EJk^3 \cos kx - NC_2 + C_3Nk \sin kx - C_4Nk \cos kx.$$

Учитывая, что $EJk^3 = Nk$, получим:

$$Q(x) = -NC_2. \quad (17)$$

Заметим, что полученные формулы позволяют решать достаточно широкий класс задач, в которых на стержень действуют сосредоточенные силы, но отсутствует распределенная нагрузка, однако основной проблемой остается определение постоянных интегрирования.

10.4 Решение уравнения с помощью метода начальных параметров.

Выразим постоянные интегрирования через начальные параметры v_0 , φ_0 , M_0 и Q_0 . Для этого запишем граничные условия при $x = 0$:

$$v(0) = v_0 = C_1 + C_3,$$

$$\varphi(0) = \varphi_0 = C_2 + C_4 k,$$

$$M(0) = M_0 = C_3 EJk^2, \Rightarrow C_3 = \frac{M_0}{EJk^2} = \frac{M_0}{N}, \quad C_1 = v_0 - C_3 = v_0 - \frac{M_0}{N},$$

$$Q(0) = Q_0 = -NC_2, \Rightarrow C_2 = -\frac{Q_0}{N}, \quad C_4 = \frac{\varphi_0 - C_2}{k} = \frac{\varphi_0}{k} + \frac{Q_0}{kN}.$$

$$v(x) = v_0 - \frac{M_0}{N} - \frac{Q_0}{N}x + \frac{M_0}{N} \cos kx + \left(\frac{\varphi_0}{k} + \frac{Q_0}{kN}\right) \sin kx.$$

При таком подходе «функции влияния» выстраиваются автоматически:

$$v(x) = v_0 + \frac{\varphi_0}{k} \sin kx - \frac{M_0}{N} (1 - \cos kx) - \frac{Q_0}{kN} (kx - \sin kx), \quad (18)$$

$$\varphi(x) = \varphi_0 \cos kx - \frac{M_0 k}{N} \sin kx - \frac{Q_0}{N} (1 - \cos kx), \quad (19)$$

$$M(x) = \varphi_0 EJk \sin kx + M_0 \cos kx + \frac{Q_0}{k} \sin kx, \quad (20)$$

$$Q(x) = Q_0. \quad (21)$$

Решения (18) – (21) можно использовать в отсутствие распределенной нагрузки, например, для определения значения критической силы стержня при различных граничных условиях.

Определим критическую силу для стержня, представленного на рис.5.

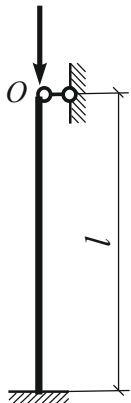


Рис.5.

$v_0 = M_0 = 0$. Граничные условия: при $x = l$ $v = \varphi = 0$.

$$v(l) = \frac{\varphi_0}{k} \sin kl - \frac{Q_0}{kN} (kl - \sin kl) = 0,$$

$$\varphi(x) = \varphi_0 \cos kl - \frac{Q_0}{N} (1 - \cos kl) = 0.$$

Получили однородную систему 2-х уравнений.

1. $\varphi_0 = Q_0 = 0$ – тривиальное решение.

2. $\varphi_0 \neq 0, Q_0 \neq 0 \Rightarrow \det = 0$. Обозначим $v = kl$.

$$\det = -\sin v(1 - \cos v) + \cos v(v - \sin v) = .$$

$$= -\sin v + \sin v \cos v + v \cos v - \sin v \cos v = 0.$$

$$\text{Окончательно:} \quad \operatorname{tg} v = v \Rightarrow v = 4,49341 \approx \frac{\pi}{0,7}.$$

$$N = k^2 EJ = \frac{v^2 EJ}{l^2} = \frac{\pi^2 EJ}{(0,7l)^2}. \quad \text{Отсюда } \mu = 0,7.$$

Аналогично определяются критические силы и при других граничных условиях, в том числе и при наличии промежуточных опор.

10.5 Частное решение для равномерно распределенной нагрузки.

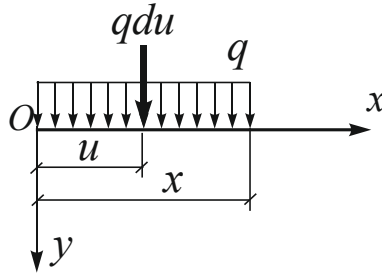


Рис.6. К выводу частного решения от равномерно распределенной нагрузки.

Воспользуемся функцией влияния для сосредоточенной силы:

$$\begin{aligned} v_q(x) &= \int_0^x \frac{q du}{kN} [k(x-u) - \sin k(x-u)] = -\frac{q}{k^2 N} \int_{kx}^0 (t - \sin t) dt = \\ &= \frac{q}{k^2 N} \int_0^{kx} (t - \sin t) dt = \frac{q}{k^2 N} \left(\frac{t^2}{2} + \cos t \right)_0^{kx}. \end{aligned}$$

Здесь использована подстановка:

$$t = k(x-u), \quad du = -\frac{dt}{k} \quad (\text{при } u=0 \quad t=kx); \quad (\text{при } u=x \quad t=0).$$

Окончательно получаем:

$$v_q(x) = \frac{q}{k^2 N} \left(\frac{(kx)^2}{2} + \cos kx - 1 \right),$$

$$\varphi_q(x) = \frac{q}{kN} (kx - \sin kx),$$

$$M_q(x) = -\frac{q}{k^2} (1 - \cos kx),$$

$$Q_q(x) = -\frac{q}{k} \sin kx - \frac{q}{k} (kx - \sin kx) = -qx.$$

10.6 Таблица реакций сжато-изогнутых однопролетных балок.

10.6.1 Балки первого типа

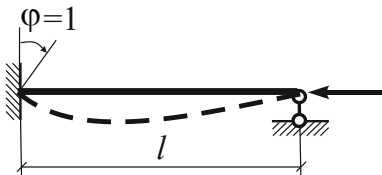


Рис.7.

$$v_0 = 0, \quad \varphi_0 = 1.$$

Граничные условия: при $x=l$ $v = M = 0$.

$$v(l) = \frac{1}{k} \sin kl - \frac{M_0}{N} (1 - \cos kl) - \frac{Q_0}{kN} (kl - \sin kl) = 0$$

$$M(l) = EJk \sin kl + M_0 \cos kl + \frac{Q_0}{k} \sin kl = 0,$$

Обозначим $v = kl$.

$$\begin{cases} M_0(1 - \cos v) + \frac{Q_0}{k}(v - \sin v) = EJk \sin v, \\ M_0 \cos v + \frac{Q_0}{k} \sin v = -EJk \sin v. \end{cases}$$

$$M_0 = \frac{vEJk \sin v}{(1 - \cos v) \sin v - \cos v(v - \sin v)} = \frac{v^2 \sin v}{3(\sin v - v \cos v)} \frac{3EJ}{l} = \frac{v^2 \operatorname{tg} v}{3(\operatorname{tg} v - v)} \frac{3EJ}{l}$$

$$Q_0 = \frac{[-(1 - \cos v) - \cos v]EJk^2 \sin v}{(1 - \cos v) \sin v - \cos v(v - \sin v)} = -\frac{v^2 \sin v}{3(\sin v - v \cos v)} \frac{3EJ}{l^2} = -\frac{v^2 \operatorname{tg} v}{3(\operatorname{tg} v - v)} \frac{3EJ}{l^2}$$

$$M_0 = \varphi_1(v) \frac{3EJ}{l},$$

$$Q_0 = -\varphi_1(v) \frac{3EJ}{l^2}$$

$\varphi_1(v)$

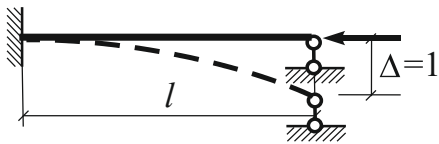


Рис.8.

$$v_0 = 0, \quad \varphi_0 = 0.$$

Граничные условия: при $x = l \quad v = 1, \quad M = 0$

$$v(l) = -\frac{M_0}{N}(1 - \cos kl) - \frac{Q_0}{kN}(kl - \sin kl) = 1,$$

$$M(l) = M_0 \cos kl + \frac{Q_0}{k} \sin kl = 0,$$

Обозначим $v = kl$.

$$\begin{cases} M_0(1 - \cos v) + \frac{Q_0}{k}(v - \sin v) = -EJk^2, \\ M_0 \cos v + \frac{Q_0}{k} \sin v = 0. \end{cases}$$

$$M_0 = \frac{-EJk^2 \sin v}{(1 - \cos v) \sin v - \cos v(v - \sin v)} = \frac{-v^2 \sin v}{3(\sin v - v \cos v)} \frac{3EJ}{l^2} = -\frac{v^2 \operatorname{tg} v}{3(\operatorname{tg} v - v)} \frac{3EJ}{l^2}$$

$$Q_0 = \frac{EJk^3 \cos v}{(1 - \cos v) \sin v - \cos v(v - \sin v)} = \frac{v^3 \cos v}{3(\sin v - v \cos v)} \frac{3EJ}{l^3} = \frac{v^3}{3(\operatorname{tg} v - v)} \frac{3EJ}{l^3}$$

$$M_0 = -\varphi_1(v) \frac{3EJ}{l^2}$$

$$Q_0 = \eta_1(v) \frac{3EJ}{l^3}$$

$\varphi_1(v)$

$\eta_1(v)$

10.6.2 Балки второго типа

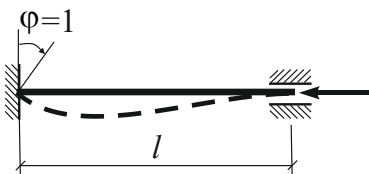


Рис.9.

$$v_0 = 0, \quad \varphi_0 = 1.$$

Граничные условия: при $x = l \quad v = \varphi = 0$.

$$v(l) = \frac{1}{k} \sin kl - \frac{M_0}{N}(1 - \cos kl) - \frac{Q_0}{kN}(kl - \sin kl) = 0$$

$$\varphi(l) = \cos kl - \frac{M_0 k}{N} \sin kl - \frac{Q_0}{N}(1 - \cos kl) = 0,$$

Обозначим $\nu = kl$.

$$\begin{cases} M_0(1 - \cos \nu) + \frac{Q_0}{k}(\nu - \sin \nu) = EJk \sin \nu, \\ M_0 \sin \nu + \frac{Q_0}{k}(1 - \cos \nu) = EJk \cos \nu. \end{cases}$$

$$M_0 = \frac{[\sin \nu(1 - \cos \nu) - \cos \nu(\nu - \sin \nu)]EJk}{(1 - \cos \nu)^2 - \sin \nu(\nu - \sin \nu)} = \frac{\nu(\sin \nu - \nu \cos \nu)}{4(2 - 2 \cos \nu - \nu \sin \nu)} \frac{4EJ}{l} =$$

$$= \frac{\nu \cos \nu(\operatorname{tg} \nu - \nu)}{8(2 \sin^2 \frac{\nu}{2} - \frac{\nu}{2} 2 \sin \frac{\nu}{2} \cos \frac{\nu}{2})} \frac{4EJ}{l} = \frac{\nu \cos \nu(\operatorname{tg} \nu - \nu)}{8 \sin \nu(\operatorname{tg} \frac{\nu}{2} - \frac{\nu}{2})} \frac{4EJ}{l} = \frac{\nu(\operatorname{tg} \nu - \nu)}{8 \operatorname{tg} \nu(\operatorname{tg} \frac{\nu}{2} - \frac{\nu}{2})} \frac{4EJ}{l}$$

$$Q_0 = \frac{[\cos \nu(1 - \cos \nu) - \sin^2 \nu]EJk^2}{(1 - \cos \nu)^2 - \sin \nu(\nu - \sin \nu)} = \frac{\nu^2(\cos \nu - 1)}{6(2 - 2 \cos \nu - \nu \sin \nu)} \frac{6EJ}{l^2} =$$

$$= -\frac{\nu^2 2 \sin^2 \frac{\nu}{2}}{12(2 \sin^2 \frac{\nu}{2} - \frac{\nu}{2} 2 \sin \frac{\nu}{2} \cos \frac{\nu}{2})} \frac{6EJ}{l^2} = -\frac{\left(\frac{\nu}{2}\right)^2 \operatorname{tg} \frac{\nu}{2}}{3(\operatorname{tg} \frac{\nu}{2} - \frac{\nu}{2})} \frac{6EJ}{l^2}$$

$M_0 = \varphi_2(\nu) \frac{4EJ}{l},$

$Q_0 = -\varphi_4(\nu) \frac{6EJ}{l^2}$

$\varphi_2(\nu)$

$\varphi_4(\nu)$

$$M(l) = EJk \sin kl + M_0 \cos kl + \frac{Q_0}{k} \sin kl =$$

$$= EJk \sin \nu + \varphi_2(\nu) \frac{4EJ}{l} \cos \nu - \varphi_4(\nu) \frac{6EJ}{kl^2} \sin \nu =$$

$$= \frac{EJ}{l} \nu \sin \nu + \frac{\nu(\operatorname{tg} \nu - \nu)}{8 \operatorname{tg} \nu \left(\operatorname{tg} \frac{\nu}{2} - \frac{\nu}{2} \right)} \frac{4EJ}{l} \cos \nu - \frac{\left(\frac{\nu}{2} \right)^2 \operatorname{tg} \frac{\nu}{2}}{3 \left(\operatorname{tg} \frac{\nu}{2} - \frac{\nu}{2} \right)} \frac{6EJ}{\nu l} \sin \nu =$$

$$= \left[\frac{2\nu \left(\operatorname{tg} \frac{\nu}{2} - \frac{\nu}{2} \right) \sin^2 \nu}{4 \sin \nu \left(\operatorname{tg} \frac{\nu}{2} - \frac{\nu}{2} \right)} + \frac{\nu(\operatorname{tg} \nu - \nu) \cos^2 \nu}{4 \sin \nu \left(\operatorname{tg} \frac{\nu}{2} - \frac{\nu}{2} \right)} - \frac{\nu \operatorname{tg} \frac{\nu}{2} \sin^2 \nu}{4 \sin \nu \left(\operatorname{tg} \frac{\nu}{2} - \frac{\nu}{2} \right)} \right] \frac{2EJ}{l} =$$

$$= \nu \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\nu}{2} \sin^2 \nu - \nu \sin^2 \nu + \operatorname{tg} \nu \cos^2 \nu - \nu \cos^2 \nu - \operatorname{tg} \frac{\nu}{2} \sin^2 \nu}{4 \sin \nu \left(\operatorname{tg} \frac{\nu}{2} - \frac{\nu}{2} \right)} \frac{2EJ}{l} =$$

$$= v \frac{\operatorname{tg} \frac{v}{2} \sin^2 v + \operatorname{tg} v \cos^2 v - v}{4 \sin v \left(\operatorname{tg} \frac{v}{2} - \frac{v}{2} \right)} \frac{2EJ}{l} = v \frac{2 \sin^2 \frac{v}{2} \sin v + \sin v \cos v - v}{4 \sin v \left(\operatorname{tg} \frac{v}{2} - \frac{v}{2} \right)} \frac{2EJ}{l} =$$

$$= v \frac{(2 \sin^2 \frac{v}{2} + \cos v) \sin v - v}{4 \sin v \left(\operatorname{tg} \frac{v}{2} - \frac{v}{2} \right)} \frac{2EJ}{l} = - \frac{v(v - \sin v)}{4 \sin v \left(\operatorname{tg} \frac{v}{2} - \frac{v}{2} \right)} \frac{2EJ}{l} \cdot M_l = -\varphi_3(v) \frac{2EJ}{l}.$$

$\varphi_3(v)$

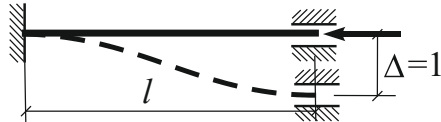


Рис.10.

$$v_0 = 0, \quad \varphi_0 = 0.$$

Граничные условия: при $x = l$ $v = 1$, $\varphi = 0$.

$$v(l) = -\frac{M_0}{N} (1 - \cos kl) - \frac{Q_0}{kN} (kl - \sin kl) = 1,$$

$$\varphi(l) = -\frac{M_0 k}{N} \sin kl - \frac{Q_0}{N} (1 - \cos kl) = 0,$$

Обозначим $v = kl$.

$$\begin{cases} M_0(1 - \cos v) + \frac{Q_0}{k}(v - \sin v) = -EJk^2, \\ M_0 \sin v + \frac{Q_0}{k}(1 - \cos v) = 0. \end{cases}$$

$$M_0 = -\frac{(1 - \cos v)EJk^2}{(1 - \cos v)^2 - \sin v(v - \sin v)} = -\frac{v^2(1 - \cos v)}{6(2 - 2 \cos v - v \sin v)} \frac{6EJ}{l^2} =$$

$\varphi_4(v)$

$$= -\frac{v^2 2 \sin^2 \frac{v}{2}}{12(2 \sin^2 \frac{v}{2} - \frac{v}{2} 2 \sin \frac{v}{2} \cos \frac{v}{2})} \frac{6EJ}{l^2} = -\frac{\left(\frac{v}{2}\right)^2 \operatorname{tg} \frac{v}{2}}{3\left(\operatorname{tg} \frac{v}{2} - \frac{v}{2}\right)} \frac{6EJ}{l^2}$$

$$Q_0 = \frac{\sin v EJk^3}{(1 - \cos v)^2 - \sin v(v - \sin v)} = \frac{v^3 \sin v}{12(2 - 2 \cos v - v \sin v)} \frac{12EJ}{l^3} =$$

$\eta_2(v)$

$$= \frac{v^3 2 \sin \frac{v}{2} \cos \frac{v}{2}}{24(2 \sin^2 \frac{v}{2} - \frac{v}{2} 2 \sin \frac{v}{2} \cos \frac{v}{2})} \frac{12EJ}{l^3} = \frac{\left(\frac{v}{2}\right)^3}{3\left(\operatorname{tg} \frac{v}{2} - \frac{v}{2}\right)} \frac{12EJ}{l^3}$$

$M_0 = -\varphi_4(v) \frac{6EJ}{l^2},$

$Q_0 = \eta_2(v) \frac{12EJ}{l^3}.$

Подробная таблица реакций сжато-изогнутого стержня приводится в отдельном файле.

Следует обратить внимание на взаимность единичных реакций в тех случаях, когда она должна выполняться.

**Таблица функций, входящих в выражения реакций
сжато-изогнутого стержня.**

$\varphi_1(v) = \frac{v^2 \operatorname{tg} v}{3(\operatorname{tg} v - v)}$	$\varphi_2(v) = \frac{v(\operatorname{tg} v - v)}{8 \operatorname{tg} v \left(\operatorname{tg} \frac{v}{2} - \frac{v}{2} \right)}$
$\varphi_3(v) = \frac{v(v - \sin v)}{4 \sin v \left(\operatorname{tg} \frac{v}{2} - \frac{v}{2} \right)}$	$\varphi_4(v) = \frac{\left(\frac{v}{2} \right)^2 \operatorname{tg} \frac{v}{2}}{3 \left(\operatorname{tg} \frac{v}{2} - \frac{v}{2} \right)}$
$\eta_1(v) = \frac{v^3}{3(\operatorname{tg} v - v)}$	$\eta_2(v) = \frac{\left(\frac{v}{2} \right)^3}{3 \left(\operatorname{tg} \frac{v}{2} - \frac{v}{2} \right)}$
$\varphi_5(v) = v \operatorname{tg} v$	$\varphi_6(v) = \frac{4 \operatorname{tg} \frac{v}{4}}{v}$
$\varphi_7(v) = \frac{\frac{1}{\cos \frac{v}{2}} - 1}{6 \left(1 - \frac{v}{\operatorname{tg} v} \right)}$	$\varphi_8(v) = \frac{\eta_1(v)}{v^3} \left(\frac{\sin \frac{v}{2}}{\cos v} - \frac{v}{2} \right)$

10.7 Расчет рам на устойчивость методом перемещений.

Считается, что все сжимающие силы зависят от одного параметра P , то есть могут быть представлены в виде βP .

Порядок определения критической силы для рамы, в стойках которой возникает только центральное сжатие (рис.2,б):

1. Получить основную систему метода перемещений, закрепив жесткие узлы от поворотов, а пояса от смещений.
2. Для сжатых стоек ввести обозначения для параметров, зависящих от приложенной сжимающей силы, длины и жесткости: $v_i = k_i l_i = l_i \sqrt{\frac{P_i}{EJ_i}}$;
3. Составить соотношения между ними, выразив все через одно, например через v_1 , по принципу: $v_i = \alpha_i v_1$. Тогда этот параметр становится основным, определяющим критическую силу P_1 .
4. Построить единичные эпюры в основной системе метода перемещений. При этом для сжатых стоек эпюры будут криволинейными и строятся по «новым» таблицам.

5. Вырезанием узлов и поясов определить единичные реакции r_{ij} в установленных в соответствии с методом перемещений связях. При этом, для сжатых стоек реакции определяются с использованием «новых» таблиц и, в связи с этим, содержат функции $\varphi_j(v_i)$ или $\eta_j(v_i)$.

6. Составляется система канонических уравнений метода перемещений. Учитывая, что поперечных нагрузок в задачах на определение критических сил нет, и, следовательно, грузовой эпюры тоже нет, все $R_{iq} = 0$. Таким образом, в случае двух неизвестных система имеет вид:

$$r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 = 0,$$

$$r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 = 0.$$

7. Такая система называется однородной и имеет два решения:

1. $Z_1 = Z_2 = 0$ – тривиальное решение (отсутствие потери устойчивости),
2. $Z_1 \neq 0, Z_2 \neq 0$ – потеря устойчивости. Но тогда определитель должен быть равен нулю:

$$\det = r_{11}r_{22} - r_{12}r_{21} = r_{11}r_{22} - (r_{12})^2 = 0.$$

8. Получаем трансцендентное уравнение, зависящее от основного параметра v_1 . Подбором (или как-то ещё – Excel, Маткад) находится наименьший корень этого уравнения. Он-то и дает возможность найти критическую силу по формуле

$$P_1 = \frac{v_1^2 EJ_1}{l_1^2}.$$

9. Проверяется так называемая «местная» устойчивость по формуле Эйлера – возможность потери устойчивости без смещения узлов. То есть силы, найденные по формуле Эйлера для всех сжатых стоек в предположении отсутствия смещения узлов, должны быть не меньше найденной P_1 .